

УДК 532.5,556.5

*В. М. Степаненко*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

## Параметризация сейш для одномерной модели водоёма

Предложена новая параметризация сейш для одномерных моделей водоёма, основанная на явном воспроизведении динамики первой горизонтальной моды колебаний. Параметризация включена в модель озера LAKE. Результаты идеализированных экспериментов с моделью хорошо согласуются с оценками частоты сейшевых колебаний из линейных моделей. Проведены расчёты динамики заглужения перемешанного слоя в термоклин при постоянном потоке импульса из атмосферы. Продемонстрировано относительное значение силы Кориолиса и сейш в «торможении» развития перемешанного слоя в зависимости от горизонтального размера водоёма. Результаты работы позволяют заключить, что одномерные модели без учёта сейш должны завышать толщину перемешанного слоя в летний стратифицированный период для водоёмов с размерами много меньшими внутреннего радиуса деформации Россби. Попутным результатом работы является формула для доступной потенциальной энергии многослойной стратифицированной жидкости.

**Ключевые слова:** водоёмы, сейши, одномерная модель.

*V. M. Stepanenko*

Lomonosov Moscow State University

## Seiche parameterization for a one-dimensional lake model

We propose a new parameterization of seiches for one-dimensional lake models based on the explicit dynamics of the first horizontal seiche mode. This parameterization is implemented into LAKE model. Idealized simulations of free seiche oscillations with the new model well correspond to linear analytical models in terms of seiche frequencies. We carry out a set of numerical experiments reproducing the deepening of a mixed layer into the underlying thermocline with the constant momentum flux from the atmosphere. A relative significance of the Coriolis force and seiches in surface mixed layer development is demonstrated to be dependent on the horizontal lake size. Our results suggest that one-dimensional lake models lacking seiche parameterization should overestimate the mixed layer depth during the summer stratification period for lakes with horizontal size much less than internal Rossby radius. A side result of this study is a formula for available potential energy for a multilayer stratified fluid.

**Key words:** lakes, seiches, one-dimensional model.

### 1. Введение

Одномерные по вертикали модели водоёма широко используются в различных задачах гидрологии, метеорологии и климатологии. Причиной этому является их вычислительная простота и в целом успешные результаты воспроизведения теплового режима и биогеохимических характеристик озёр. Для многих задач важно формирование в модели правильных вертикальных распределений термодинамических и биогеохимических переменных, которые определяются, особенно в период открытой воды, турбулентным перемешиванием.

---

© Степаненко В. М., 2018

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2018

Турбулентное перемешивание, в свою очередь, связано с полем течений; это поле в одномерных моделях, как правило, рассчитывается в приближении горизонтального пограничного слоя с вращением [1], что справедливо только для водоёмов с горизонтальными размерами, сильно превышающими внутренний радиус деформации Россби  $L_R$  ( $L_R \approx 2 - 3$  км для умеренных широт). Для малых водоёмов сила Кориолиса становится пренебрежимой в сравнении с силой горизонтального градиента давления, вызванного распределением массы в озере. Взаимодействие перераспределения массы и градиента давления приводит в замкнутых водоёмах к гравитационным колебаниям, известным как *сейши*. Поскольку горизонтальный градиент давления почти во всех в одномерных моделях не учитывается, не воспроизводятся и сейши.

Сейши обуславливают в водоёмах спектр флуктуаций всех термогидродинамических величин, с максимальными амплитудами в термоклине, однако влияние этих колебаний на среднюю стратификацию исследовано к настоящему времени слабо. Предложено множество моделей, построенных для воспроизведения сейшевых колебаний [2–5], в которых распределение термодинамических величин считается заданным, и, таким образом, сейши не влияют на вертикальное перемешивание. Единственный известный автору подход для параметризации эффекта сейш на вертикальное перемешивание в водоёме, развиваемый в работах [6, 7], основан на гипотезе, что энергия крупных сейшевых мод посредством нелинейного взаимодействия переходит на малые масштабы, на которых волны разрушаются на наклонном дне. Этот эффект параметризуется добавлением в уравнение баланса турбулентной кинетической энергии дополнительного слагаемого, форма которого конструируется из соображений размерности. В настоящей работе предлагается другой метод учёта сейш в одномерной модели водоёма, основанный на явном воспроизведении первой горизонтальной моды, несущей в озёрах наибольшую энергию. Этот метод реализован в модели озера LAKE.

Одномерная модель термогидродинамики и биогеохимии водоёма и нижележащего грунта LAKE [1,9,10] явно описывает процессы вертикального переноса тепла с учётом проникновения коротковолновой радиации в слоях воды, льда, снега и нижележащего грунта (донных отложений). Уравнения модели сформулированы относительно осреднённых по горизонтальному сечению водоёма величин, что приводит к явному учёту обмена импульсом, теплом и растворёнными газами между водной средой и наклонным дном. В толще воды используется  $k - \epsilon$  параметризация турбулентности, а в уравнениях движения учтён баротропный градиент давления [1]. В слое снега учитывается перенос жидкой фазы влаги, а в слое грунта – возможность ее замерзания. В модели описывается вертикальная диффузия растворенных газов ( $\text{CO}_2, \text{CH}_4, \text{O}_2$ ), а также их пузырьковый перенос, окисление метана, фотосинтез и процессы потребления кислорода. Включена параметризация генерации метана в грунте под водоёмом [10], причём для случая термокарстовых озёр предложена оригинальная формулировка для производства метана на нижней границе протаявшего грунта (талика). Модель проверялась на способность воспроизведения термического и ледового режимов большого числа водоёмов в контрастных климатических условиях, в том числе в рамках проекта LakeMIP (Lake Model Intercomparison Project [11–14]).

Статья построена следующим образом. В разделе 2 приводятся уравнения одномерной модели в общем виде, используемые в модели LAKE, формулируется проблема их замыкания. Затем в разделе 3 выписывается известная многослойная модель стратифицированной жидкости, выводится её вид для первой горизонтальной моды сейшевых колебаний. В разделе 4 производится замыкание уравнений одномерной модели с помощью уравнений для первой моды многослойной модели. В разделе 5 излагаются результаты тестов новой модели на известных аналитических решениях, демонстрируется влияние параметризации сейш и силы Кориолиса на скорость заглужения верхнего перемешанного слоя в термоклин. В заключении формулируются основные выводы работы.

## 2. Система уравнений одномерной модели водоёма

Рассмотрим водоём произвольной формы. Введём операцию осреднения произвольной скалярной величины  $f$  по его горизонтальному сечению  $A(z)$ :  $\bar{f} = A^{-1}(z) \int_{A(z)} f dA'$ , где  $z$  – координата, направленная вдоль силы тяжести. Применяя эту операцию к уравнению притока тепла и уравнениям движения для горизонтальных компонент скорости в приближении несжимаемой жидкости, получаем [1]:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -\mathcal{A}_T + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left( A(\lambda_m + \nu_T) \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) - \frac{1}{A} \frac{\partial A \bar{S}}{\partial z} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} [S_b + F_{T,b}(z)], \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\mathcal{A}_u - \overline{\left( \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x} \right)} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left( A(\nu + \nu_m) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) + \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} F_{u,b}(z) + l\bar{v}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\mathcal{A}_v - \overline{\left( \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial y} \right)} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left( A(\nu + \nu_m) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) + \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} F_{v,b}(z) - l\bar{u}, \quad (3)$$

где  $T$  – температура,  $(u, v) \doteq \mathbf{u}_h$  – горизонтальная скорость,  $\lambda_m, \nu$  – коэффициенты молекулярной теплопроводности и вязкости соответственно,  $\nu_T, \nu_m$  – их турбулентные аналоги,  $\rho_w$  – плотность воды,  $l$  – параметр Кориолиса,  $p$  – давление,  $S$  – кинематический поток коротковолновой радиации [м/с · К],  $\mathcal{A}_f \doteq A^{-1}(z) \int_{\Gamma_{A(z)}} f(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}) dl$  – вклад переноса величины  $f$  через границы водоёма притоками и стоком ( $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к границе горизонтального сечения водоёма  $\Gamma_{A(z)}$ ). Нижний индекс «b» указывает на значения потоков соответствующих величин на границе  $\Gamma_{A(z)}$ , т.е. на дне водоёма. Хорошим приближением в большинстве случаев является  $\bar{S} = S_b$ . Частные случаи приведённой системы уравнений решаются во многих одномерных моделях [2, 6, 16–18]. Система (1) – (3) решается в модели LAKE 2.0, где средний горизонтальный градиент давления рассчитывается как баротропный градиент [1] (подробнее см. ниже).

В настоящей работе основной задачей является параметризация слагаемых с градиентом давления в (2) – (3) для общего, бароклинного, случая, т.е. когда водоём стратифицирован по плотности. Наиболее просто эта задача решается для водоёма в форме  $[-L_x/2, L_x/2] \times [-L_y/2, L_y/2] \times [0, H]$ , из чего, в частности, следует  $A(z) = \text{const}$ , что существенно упрощает систему (1) – (3). Именно эта форма предполагается в дальнейшем изложении.

## 3. Многослойная модель стратифицированной жидкости

### 3.1. Исходные уравнения и сохранение энергии

В модели многослойной жидкости тело водоема состоит из  $N$  слоёв постоянной плотности  $\rho_i, \rho_{i+1} > \rho_i$  (нумерация вдоль силы тяжести), толщина которых испытывает малые возмущения относительно средних значений,  $h_i = H_i + h'_i$ ,  $(|h'_i/H_i| \ll 1, \sum_{i=1}^N H_i = H)$ . Для каждого слоя можно записать линеаризованные уравнения для импульса и массы (здесь и далее – без суммирования по повторяющимся индексам) [19]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p'_i}{\partial x} + l v_i, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p'_i}{\partial y} - l u_i, \quad (5)$$

$$\frac{\partial h'_i}{\partial t} + H_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) = 0, \quad (6)$$

$$p'_i = g \sum_{k=1}^N \rho_{\min(i,k)} h'_k, \quad i = \overline{1, N}. \quad (7)$$

Частным случаем этой системы при  $N = 1$  являются известные линейризованные уравнения мелкой воды. Полная кинетическая энергия системы (4) – (7) определяется как

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N H_i \rho_i \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (u_i^2 + v_i^2) dx dy. \quad (8)$$

Введём величину

$$A = \frac{g}{2} \sum_{i=1}^N \Delta \rho_i \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left( \sum_{k=i}^N h'_k \right)^2 dx dy, \quad (9)$$

где  $\Delta \rho_1 = \rho_1$  и  $\Delta \rho_i = \rho_i - \rho_{i-1}$  при  $i \geq 2$ . Используя уравнения (4) – (7), можно доказать, что

$$\frac{d(K + A)}{dt} = 0. \quad (10)$$

Величина  $A$  является обобщением на многослойный случай доступной потенциальной энергии двухслойной жидкости, введённой в [3], и получена в настоящей статье, насколько известно автору, впервые. Из (9) легко видеть, что состоянию покоя системы (4) – (7) ( $u_i, v_i, h'_i = 0, i = \overline{1, N}$ ) соответствует минимальное значение  $A = 0$ . Закон сохранения полной энергии должен быть адекватно отражён в параметризации сейш, а также соблюден при построении численной схемы этой параметризации.

### 3.2. Многослойная модель для первой горизонтальной моды

Рассмотрим трёхмерный водоём  $[-L_x/2, L_x/2] \times [-L_y/2, L_y/2] \times [0, H]$  без вращения, т.е. положим в системе (4) – (7)  $l = 0$ . Воспользуемся известным в лимнофизике фактом [2–5, 21, 22], что в озёрах энергия мод с первым горизонтальным волновым числом преобладает в спектре внутренних колебаний, и разложим решение до первой гармоники Фурье:

$$\begin{aligned} u_i &= u_{10}^i \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) + u_{11}^i \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right), \\ v_i &= v_{01}^i \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) + v_{11}^i \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right), \\ h_i &= h_{10}^i \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) + h_{01}^i \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) + h_{11}^i \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right). \end{aligned}$$

Подставляя это решение в (4) – (7), вводя величины, осреднённые по левой и правой частям горизонтального сечения  $\bar{f}^{x1} = 2/(L_x L_y) \int_{-L_x/2}^0 \int_{-L_y/2}^{L_y/2} f dy dx$ ,  $\bar{f}^{x2} = 2/(L_x L_y) \int_0^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} f dy dx$ , аналогично определяя  $\bar{f}^{y1}$  и  $\bar{f}^{y2}$ , получаем

$$\frac{d\bar{u}_j}{dt} = -\frac{\pi g}{2L_x \rho_j} \sum_{k=1}^N \rho_{\min(j,k)} \Delta_x \bar{h}'_k, \quad (11)$$

$$\frac{d\bar{v}_j}{dt} = -\frac{\pi g}{2L_y \rho_j} \sum_{k=1}^N \rho_{\min(j,k)} \Delta_y \bar{h}'_k, \quad (12)$$

$$\frac{d\Delta_x \bar{h}'_j}{dt} = \frac{2\pi H_j}{L_x} \bar{u}_j, \quad (13)$$

$$\frac{d\Delta_y \bar{h}'_j}{dt} = \frac{2\pi H_j}{L_y} \bar{v}_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (14)$$

где  $\Delta_x \bar{h}'_j = \bar{h}'_j^{x2} - \bar{h}'_j^{x1}$  – средний перепад давления вдоль оси  $x$  для первой моды, а  $\Delta_y \bar{h}'_j$  – средний перепад давления по оси  $y$ . Заметим, что уравнения (11) и (13), с одной стороны,

и (12) и (14) – с другой, представляют собой независимые системы. Теперь учёт ускорения Кориолиса можно получить формальным добавлением в правые части (11) и (12) слагаемых  $+l\bar{v}_j$  и  $-l\bar{u}_j$  соответственно, что делает систему (11) – (14) связанной.

Система (11) – (14) также обладает законом сохранения полной механической энергии  $A + K = \text{const}$ , где

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N H_i \rho_i L_x L_y (\bar{u}_i^2 + \bar{v}_i^2), \quad (15)$$

$$A = \frac{gL_x L_y}{8} \sum_{i=1}^N \Delta \rho_i \left[ \left( \sum_{k=i}^N \Delta_x \bar{h}'_k \right)^2 + \left( \sum_{k=i}^N \Delta_y \bar{h}'_k \right)^2 \right]. \quad (16)$$

#### 4. Параметризация сейш на основе многослойной модели

Примечательным свойством системы (11) – (14) является то, что она связывает *средние* по горизонтали компоненты скорости со *средним* градиентом давления, что позволяет их использовать для замыкания системы (1) – (3). Однако уравнения (1) – (3) являются дифференциальными по  $z$ , в то время как в системе (11) – (14) вертикальные профили гидродинамических величин являются кусочно-постоянными. В настоящей статье сопряжение двух систем не обосновывается математически строго, поэтому будет правильно называть результирующий метод учёта горизонтального градиента давления в одномерной модели *параметризацией*.

В непрерывном по вертикали профиле плотности воды, определяемом текущим профилем температуры в одномерной модели, выделим слои  $[z_j, z_{j+1})$ ,  $H_j = z_{j+1} - z_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ , в каждом из которых плотность меняется по глубине незначительно, и введём величины  $\rho_j \doteq H_j^{-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \rho(z) dz$ . Введём для этих слоёв переменные  $\Delta_x \bar{h}'_j$ ,  $\Delta_y \bar{h}'_j$ , для расчёта которых согласно формулам (13) – (14) будем использовать компоненты скорости из одномерной модели, осреднённые по вертикали в пределах соответствующего слоя:  $(\hat{u}_j, \hat{v}_j) = H_j^{-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} (\bar{u}, \bar{v}) dz$ . Далее, получаемый из  $\Delta_x \bar{h}'_j$ ,  $\Delta_y \bar{h}'_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ , средний горизонтальный градиент давления есть кусочно-постоянная функция глубины, с постоянным значением внутри каждого интервала  $[z_j, z_{j+1})$ . Дополненные этим градиентом давления уравнения движения одномерной модели (2) – (3) принимают вид (напоминаем, что  $A(z) = \text{const}$ ):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} (\nu + \nu_m) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - l\bar{v} = -\frac{\pi g}{2L_x \rho_j} \sum_{k=1}^N \rho_{\min(j,k)} \Delta_x \bar{h}'_k, \quad j : z \in [z_j, z_{j+1}), \quad (17)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} (\nu + \nu_m) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + l\bar{u} = -\frac{\pi g}{2L_y \rho_j} \sum_{k=1}^N \rho_{\min(j,k)} \Delta_y \bar{h}'_k, \quad j : z \in [z_j, z_{j+1}), \quad (18)$$

$$\frac{d\Delta_x \bar{h}'_j}{dt} = \frac{2\pi H_j}{L_x} \hat{u}_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (19)$$

$$\frac{d\Delta_y \bar{h}'_j}{dt} = \frac{2\pi H_j}{L_y} \hat{v}_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (20)$$

$$(\hat{u}_j, \hat{v}_j) = H_j^{-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} (\bar{u}, \bar{v}) dz, \quad j = \overline{1, N}. \quad (21)$$

Полученная система решается методом расщепления в два этапа:

- 1) Расчёт тенденции компонент скорости за счёт градиента давления вместе с шагом по времени уравнений (19) – (21) схемой Кранка–Николсон. Можно показать, что при этом выполняется сохранение величины  $A + K$  ((15) – (16)). Возникает система

линейных уравнений с плотной матрицей, которая решается прямым методом; при характерных значениях  $N \approx 2 \dots 10$  время решения этой системы почти не сказывается на общем времени расчёта моделью LAKE.

- 2) Расчёт тенденции компонент скорости за счёт вязкости и ускорения Кориолиса. Здесь также используется схема Кранка–Николсон, по вертикали применяются центральные разности, система линейных уравнений решается методом прогонки.

Отметим, что использованный здесь подход сопряжения системы (11) – (14) с системой уравнений одномерной модели использовался ещё У. Свенссоном [23], но при  $N = 1$ , т.е. воспроизводились только баротропные гравитационные колебания.

Поскольку помимо вертикальной структуры течения в изложенной выше модели явно воспроизводится также горизонтальная структура по заданной форме (1-я мода), модель правильно классифицировать как  $1^{1/2}$ -мерную.

## 5. Идеализированные численные эксперименты

### 5.1. Свободные гравитационные колебания

Задача данного численного эксперимента заключается в проверке пространственной структуры и частоты свободных гравитационных колебаний, возникающих в построенной  $1^{1/2}$ -мерной модели, при сравнении с известными дисперсионными соотношениями.

Для эксперимента были приняты следующие условия:

- глубина водоёма 5 м, длина водоёма 2900 м;
- температура в начальный момент времени линейно убывает с глубиной, с градиентом  $3 \text{ }^\circ\text{C}/\text{м}$ ;
- в качестве уравнения состояния используется линеаризованное относительно  $15 \text{ }^\circ\text{C}$  уравнение из [24]; градиенту температуры  $3 \text{ }^\circ\text{C}/\text{м}$  соответствует частота Брента–Вейсяля  $N = N_0 = 6.6 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ ;
- начальный профиль компоненты скорости по оси  $x$  принимается линейным, с максимальным значением  $10^{-2} \text{ м}/\text{с}$  на поверхности и 0 на дне, вторая компонента скорости задаётся нулём;
- напряжение ветра на поверхности  $\tau = 0$ , на дне трение даётся квадратичным законом;
- сила Кориолиса не учитывается.

Вследствие неучёта силы Кориолиса  $v$  равнялась 0 в течение всего эксперимента.

На рис. 1а представлено пространственно-временное распределение скорости течения. Как видно, амплитуда колебаний затухает со временем в силу внутренней вязкости и трения о дно. Вертикальное распределение скорости  $u$  соответствует первой вертикальной моде, таким образом, в модели явно воспроизведена мода H1V1. Период колебаний можно визуальнo оценить из рис. 1а как  $\approx 15.5$  ч. Однако в решении присутствуют и более высокочастотные колебания – см. «развёртку» одного периода моды H1V1 на рис. 1б. Вертикальная структура этих колебаний соответствует моде H1V0 (баротропная мода), а период можно оценить как  $\approx 13$  мин.

Для теоретической оценки периода баротропных мод традиционно используются линейные одномерные уравнения мелкой воды, из которых следует классическая, многократно подтверждённая наблюдениями формула Мериана [25]:

$$T_1 = \frac{2L_x}{\sqrt{gH}}. \quad (22)$$

Для оценки частот бароклиных мод можно привлечь линеаризованные уравнения Буссинеска для двумерной области с твёрдой крышкой, которые при подстановке волнового решения сводятся к задаче Штурма–Лиувилля для амплитуды вертикальной скорости  $W^1$  [19]:

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) k^2 W = 0, \quad (23)$$

$$W|_{z=0} = W|_{z=H} = 0, \quad (24)$$

где  $k$  – горизонтальное волновое число, для первой моды равно  $\pi/L_x$ ,  $\omega$  – частота. Формула Мериана даёт  $T = 13.8$  мин, а решённая методом стрельбы задача (23) – набор вертикальных мод и связанных с ними периодов, среди которых моде Н1V1 соответствует  $T = 14.7$  ч, что близко к полученным выше значениям из модели LAKE.

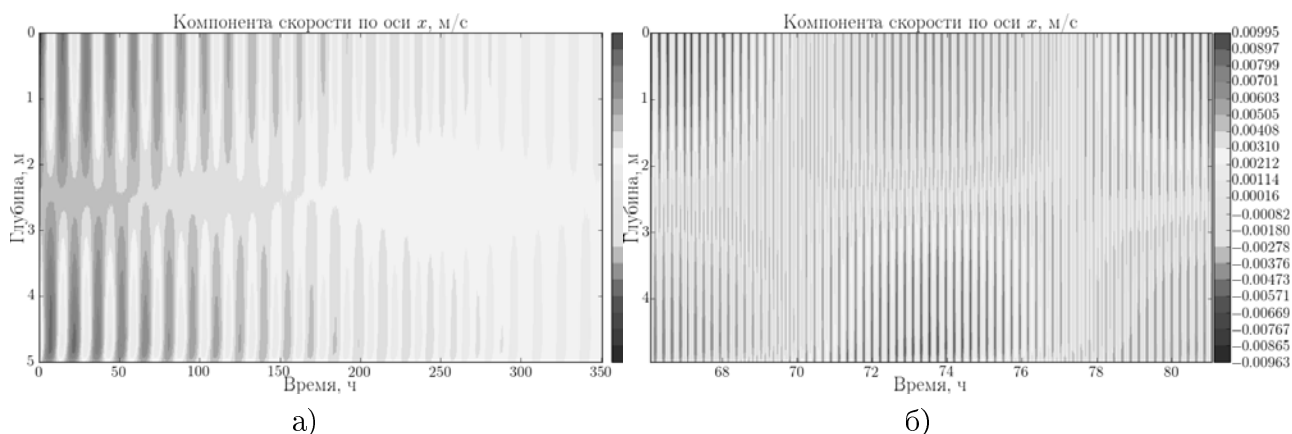


Рис. 1. Пространственно-временное распределение компоненты скорости по оси  $x$  в численном эксперименте со свободными гравитационными колебаниями (а). В колебаниях видно преобладание моды Н1V1. На рисунке б) показано то же, но за один период моды Н1V1. Здесь колебания соответствуют моде Н1V0 (баротропная сейша)

## 5.2. Эффект параметризации сейш на перемешивание в сдвиговом стратифицированном потоке

В настоящем разделе рассматривается эффект разработанной выше параметризации сейш на перемешивание в стратифицированном водоеме, возникающее при постоянном потоке импульса на верхней границе. Такая постановка задачи позволяет воспроизвести упрощённый аналог летнего заглупления перемешанного слоя в термоклин в озёрах умеренных широт. При этом эффект сейш на глубину перемешанного слоя будет сопоставлен с влиянием вращения (силы Кориолиса).

Для решения поставленной задачи с моделью LAKE проведено четыре группы численных экспериментов. Основой всех экспериментов является постановка Като–Филлипса<sup>2</sup> со следующими параметрами:

- глубина водоема 5 м;
- температура в начальный момент времени линейно убывает с глубиной, с градиентом  $3 \text{ }^\circ\text{C}/\text{м}$ ;

<sup>1</sup>Для валидации периодов колебаний в модели LAKE можно также использовать периоды из многослойной задачи (11) – (14), однако это наталкивается на необходимость нахождения корней полиномиального уравнения  $N$ -й степени.

<sup>2</sup>Лабораторный эксперимент Като и Филлипса [26] и его теоретический анализ [27] традиционно служат материалом для калибровки турбулентных замыканий [28].

- в качестве уравнения состояния используется линейризованное относительно  $15\text{ }^\circ\text{C}$  уравнение из [24]; градиенту температуры  $3\text{ }^\circ\text{C}/\text{м}$  соответствует частота Брента–Вяйсяля  $N = N_0 = 6.6 * 10^{-2}\text{ с}^{-1}$ ;
- в начальный момент времени  $u = 0, v = 0$ ;
- горизонтальный градиент давления не учитывается;
- напряжение ветра на поверхности  $\tau = 10^{-2}\text{ Н}/\text{м}^2$ , на дне трение даётся квадратичным законом;
- сила Кориолиса не учитывается.

Группы экспериментов отличаются в постановке от условий Като–Филлипса:

- Эксперимент К–Р+bts (Kato–Phillips + *barotropic* seiches). Средний горизонтальный градиент давления рассчитывается по параметризации *баротропных* сейш (т.е.  $N = 1$  в (17) – (21)).
- Эксперименты К–Р+bcs (Kato–Phillips + *baroclinic* seiches). Средний горизонтальный градиент давления рассчитывается по параметризации *бароклинических* сейш, описанной в п.4<sup>3</sup>.
- Эксперимент К–Р+kor. Постановка эксперимента Като–Филлипса дополняется учётом горизонтальных ускорений Кориолиса, с параметром Кориолиса, соответствующим широте  $55^\circ$  с.ш.
- Эксперименты К–Р+kor+bcs. Постановка Като–Филлипса с добавлением ускорения Кориолиса и параметризации бароклинических сейш.

В тех группах экспериментов, где используется параметризация сейш, параметрами модели становятся горизонтальные размеры водоема. Когда в модели принимаются во внимание и вращение, и стратификация (серия К–Р+kor+bcs), естественно рассмотреть три случая:  $L_x = L_y = L \ll L_R$ ,  $L_x = L_y = L = L_R$  и  $L_x = L_y = L \gg L_R$ . Учитывая, что при выбранной стратификации и широте  $L_R \approx 2770$  м, в расчётах принимались значения  $L = 300$  м,  $L_R = 2770$  м,  $300$  км. Кроме того, в природе часто встречаются вытянутые водоемы с преимущественно продольным направлением ветра (например, озёра, окружённые лесом или высоким рельефом), длина которых может превышать внутренний радиус деформации Россби, а ширина – быть значительно меньше  $L_R$ . Поэтому в серию К–Р+kor+bcs были добавлены эксперименты с  $L_x = 300$  км,  $L_y = 300$  м.

Рассмотрим рис. 2. Быстрее всего водоём перемешивается в эксперименте Като–Филлипса. Более медленно заглужение перемешанного слоя происходит при включении баротропного градиента давления. Наиболее медленно перемешивание происходит в экспериментах с включённым вращением или бароклиническими сейшами.

Близость результатов экспериментов с вращением и бароклиническими сейшами неслучайна. Как в случае вращающегося бесконечного слоя жидкости, так и для замкнутого бассейна с бароклиническими сейшами достигаются квазистационарные режимы течения, в которых силы Кориолиса и горизонтального градиента давления соответственно компенсируют в балансе импульса перемешанного слоя приток импульса из атмосферы. Это, при прочих равных условиях, уменьшает скорость в перемешанном слое, останавливает рост сдвиговой генерации ТКЭ и «затормаживает» заглужение перемешанного слоя. Квазистационарное течение при вращении описывается профилем, близким к спирали Экмана, а при наличии бароклинического градиента давления в замкнутом водоёме это течение можно получить

<sup>3</sup>Эта параметризация на самом деле описывает как бароклинические, так и баротропные моды, что продемонстрировано в п. 5.1.



в стационарном варианте уравнений (11) – (14) при  $N \geq 2$ , если в них добавить трение на поверхности.

В двух же экспериментах, в которых толщина перемешанного слоя росла быстрее всего, квазистационарное течение не достигается. Так, в постановке Като–Филлипса в балансе импульса перемешанного слоя присутствует только приток импульса из атмосферы при слабом молекулярном трении на нижней границе слоя; таким образом, средняя скорость в перемешанном слое непрерывно растёт, растёт сдвиговая генерация ТКЭ и заглупление верхнего слоя. При добавлении в систему баротропного градиента давления квазистационарное течение также невозможно. Это можно показать, используя уравнения (11) – (14) для, например, двухслойной жидкости, если добавить в них трение на поверхности и заменить градиент давления в правой части баротропным градиентом. Тогда при условии стационарности эти уравнения примут вид

$$0 = \frac{u_*^2}{H_1} - \frac{\pi g}{2L_x} \Delta_x \bar{h}'_1, \quad (25)$$

$$0 = -\frac{\pi g}{2L_x} \Delta_x \bar{h}'_1, \quad (26)$$

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0, \quad (27)$$

т.е. становятся несовместными.

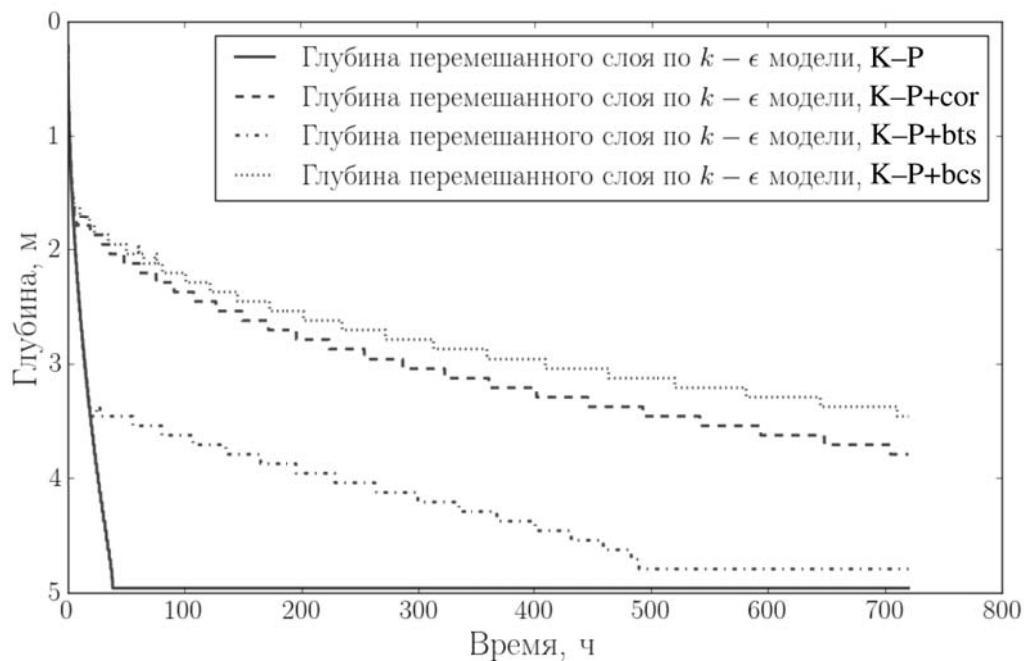


Рис. 2. Эволюция глубины перемешанного слоя в эксперименте Като–Филлипса (К–Ф), в эксперименте К–Ф, дополненном учётом силы Кориолиса, в эксперименте К–Ф с включенной параметризацией баротропных сейш и в эксперименте К–Ф с включенной параметризацией бароклинических сейш (результаты моделирования),  $L_x = L_y = L_R$

Обратимся теперь к рис. 3. Из него видно, что скорость заглупления перемешанного слоя слабо чувствительна к включению вращения при  $L \ll L_R$  и при  $L = L_R$ . Однако при  $L \gg L_R$  учёт силы Кориолиса значительно ограничивает скорость заглупления верхнего слоя. Объясняется это тем, что горизонтальный градиент давления при  $L \gg L_R$  растёт во времени при заданном потоке импульса из атмосферы очень медленно, не успевая обеспечить стационарное течение, так что вращение оказывается значительно более эффективным механизмом подавления вовлечения перемешанного слоя в термоклин.

И, наконец, на рис. 4 видно, что в случае, когда ширина водоёма сильно меньше  $L_R$ , а длина – сильно больше  $L_R$ , включение силы Кориолиса слабо влияет на заглубление перемешанного слоя. Это согласуется с известными теоретическими представлениями, что именно ширина озера является пространственным масштабом, определяющим роль силы Кориолиса [29].

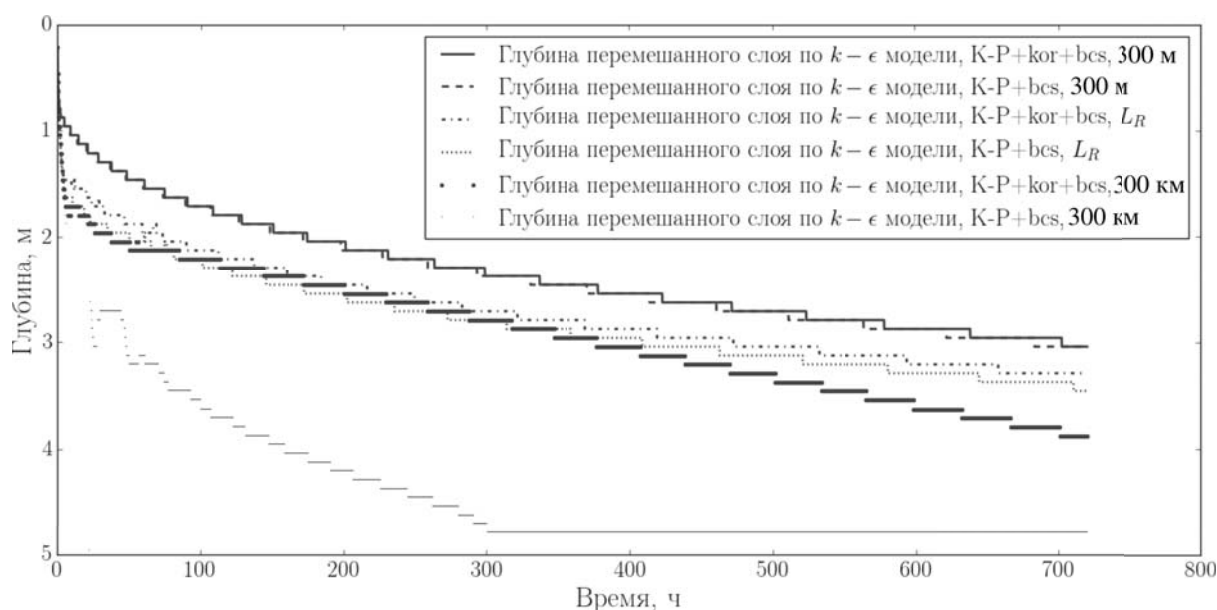


Рис. 3. Эволюция глубины перемешанного слоя в эксперименте Като–Филлипса, дополненном учетом силы Кориолиса и параметризацией бароклинных сейш (результаты моделирования), при горизонтальных размерах озера:  $300 \times 300$  м,  $L_R \times L_R$  и  $300 \times 300$  км ( $L_R \approx 2770$  м)

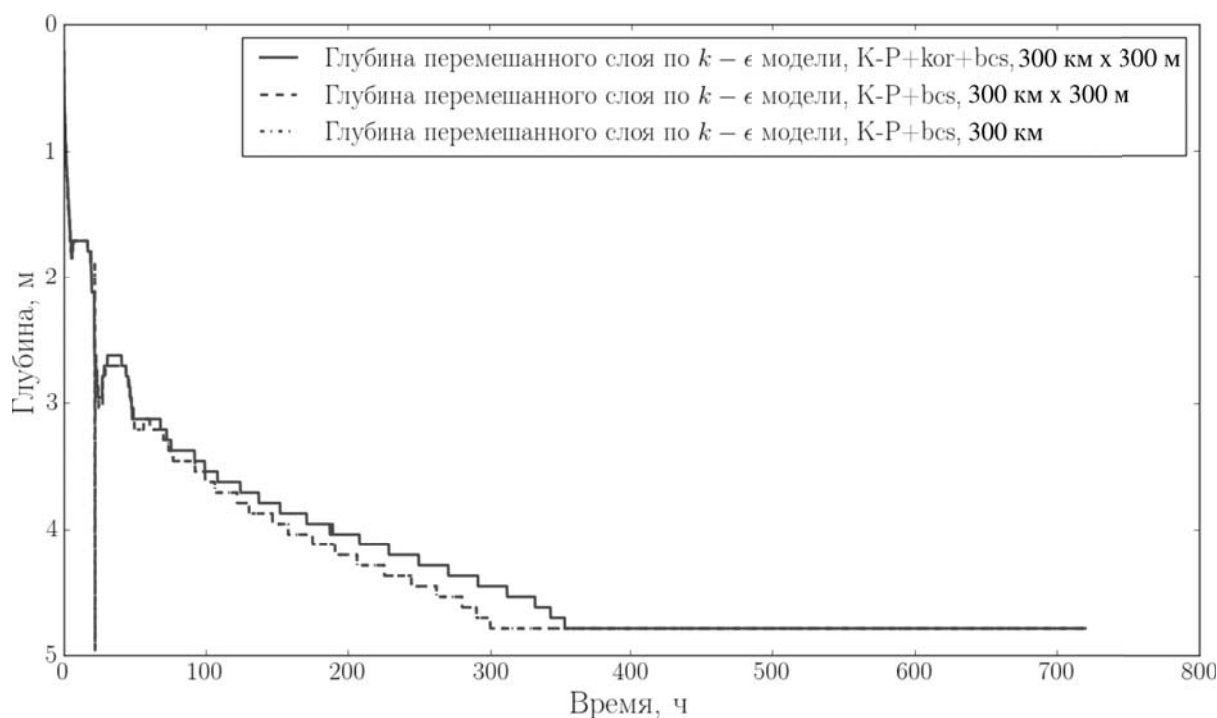


Рис. 4. Эволюция глубины перемешанного слоя в эксперименте Като–Филлипса, дополненном учетом силы Кориолиса и параметризацией бароклинных сейш (результаты моделирования), при горизонтальных размерах озера:  $300$  км  $\times$   $300$  м и  $300 \times 300$  км

## 6. Заключение

Итак, в настоящей работе предложен метод замыкания (параметризации) горизонтально осреднённых одномерных уравнений гидродинамики замкнутого водоёма в части расчёта ускорения за счёт горизонтального градиента давления. Замыкание достигается привлечением модели многослойной жидкости в предположении, что горизонтальная структура поля скорости и давления задана только первой горизонтальной модой. Попутно впервые получено выражение для доступной потенциальной энергии многослойной модели. В результате замыкания в одномерной модели появляются сейшевые колебания с первым горизонтальным волновым числом, а множество «разрешённых» моделью вертикальных волновых чисел определяется текущей стратификацией озера. Данная параметризация включена в модель водоёма LAKE. Дополнительное время на расчёт параметризации оказалось очень малым по сравнению с общим временем интегрирования модели.

С дополненной таким образом моделью LAKE произведены тестовые расчёты. В численных экспериментах, воспроизводящих свободные колебания в водоёме, частоты баротропных и бароклинных колебаний в модели хорошо согласуются с теоретическими оценками на основе линейных моделей. В расчётах заглупления сдвигового перемешанного слоя в нижележащий термоклин при постоянном потоке импульса из атмосферы (аналог летнего заглупления эпилимниона в озёрах) показано следующее:

- сила Кориолиса в неограниченном горизонтальном слое жидкости и горизонтальный градиент давления ( $\sim$  сейши) в ограниченном водоёме подавляют скорость заглупления сдвигового перемешанного слоя в устойчиво стратифицированный нижележащий слой по сравнению со случаем неограниченного горизонтального слоя без вращения и горизонтального градиента давления;
- при горизонтальном размере водоёма  $L$  порядка внутреннего радиуса деформации Россби  $L_R$  (для средних широт и не очень глубоких озёр  $L_R \sim 2-3$  км) влияние сейш и вращения на глубину перемешанного слоя сравнимо, при  $L \gg L_R$  вращение значительно сильнее подавляет заглупление эпилимниона, а при  $L \ll L_R$  значительно больше ограничивают его развитие сейши.

Из этих выводов можно сделать следующее заключение о применимости классических одномерных моделей водоёма (без учёта горизонтального градиента давления, но с силой Кориолиса) к вычислению летней стратификации озёр. При  $L \gtrsim L_R$  эти модели применимы, но при  $L \ll L_R$  они должны завьшать глубину летнего перемешанного слоя. Последнее утверждение подтверждается результатами моделирования небольших озёр, когда приходится заново калибровать параметры моделей или привлекать трудно проверяемые гипотезы о наличии дополнительных физических механизмов, подавляющих вертикальное перемешивание [11].

Ещё одним важным результатом включения параметризации сейш в одномерную модель стало появление придонного сейшевого течения и соответствующего ему турбулентного пограничного слоя (в данной статье не обсуждается), в то время как в классических одномерных моделях горизонтальная скорость отлична от нуля только в верхнем перемешанном слое. Наличие придонного пограничного слоя хорошо известно из данных наблюдений [30], и оно важно для вертикального переноса растворённых веществ, в т.ч. парниковых газов, из донных отложений.

На основе дополненной модели LAKE в настоящее время ведутся расчёты характеристик сейш в озёрах, для которых имеются детальные измерения внутренних колебаний.

---

Работа выполнена в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова при поддержке гранта РФФИ 17-17-01210 «Исследование процессов взаимодействия атмосферного пограничного слоя умеренных и высоких широт с

деятельным слоем суши и водоёмами: разработка параметризаций для моделей Земной системы».

## Литература

1. *Henderson-Sellers B.* New formulation of eddy diffusion thermocline models // *Appl. Math. Modelling*. 1985. V. 9. P. 441–446.
2. *Horn W., Mortimer C.H., Schwab D.J.* Wind-induced internal seiches in Lake Zurich observed and modeled // *Limnology and Oceanography*. 1986. V. 31(6) P. 1232–1254.
3. *Rueda F.J., Schladow S.G.* Surface seiches in lakes of complex geometry // *Limnology and Oceanography*. 2002. V. 47(3). P. 906–910.
4. *Lemmin U., Mortimer C.H., Bäuerle E.* Internal seiche dynamics in Lake Geneva // *Limnology and Oceanography*. 2005. V. 50(1). P. 207–216.
5. *Kirillin G., Lorang M.S., Lippmann T.C., Gotschalk C.C., Schimmelpfennig S.* Surface seiches in Flathead Lake // *Hydrol. Earth Syst. Sci.* 2015. V. 19. P. 2605–2615.
6. *Goudsmit G.-H., Burchard H., Peeters F., Wüest A.* Application of  $k-\varepsilon$  turbulence models to enclosed basins: The role of internal seiches // *Journal of Geophysical Research*. 2002. V. 107(C12). P. 3230.
7. *Gaudard A., Schwefel R., Vinnøa L.R., Schmid M., Wüest A., Bouffard D.* Optimizing the parameterization of deep mixing and internal seiches in one-dimensional hydrodynamic models: a case study with Simstrat v1.3 // *Geoscientific Model Development*. 2017. V. 10(9). P. 3411–3423.
8. *Stepanenko V., Mammarella I., Ojala A., Miettinen H., Lykosov V., and Vesala T.* LAKE 2.0: a model for temperature, methane, carbon dioxide and oxygen dynamics in lakes // *Geoscientific Model Development*. 2016. V. 9, N 5. P. 1977–2006.
9. *Степаненко В.М., Лыкосов В.Н.* Численное моделирование процессов теплообмена в системе «водоем-грунт» // *Метеорология и гидрология*. 2005. № 3. С. 95–104.
10. *Степаненко В.М., Мачульская Е.Е., Глаголев М.В., Лыкосов В.Н.* Моделирование эмиссии метана из озер зоны вечной мерзлоты // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2011. Т. 47(2). С. 275–288.
11. *Stepanenko V., Jöhnk K.D., Machulskaya E., Perroud M., Subin Z., Nordbo A., Mammarella I., Mironov D.* Simulation of surface energy fluxes and stratification of a small boreal lake by a set of one-dimensional models // *Tellus, Series A: Dynamic Meteorology and Oceanography*. 2014. V. 66(1).
12. *Stepanenko V.M., Martynov A., Jöhnk K.D., Subin Z.M., Perroud M., Fang X., Beyrich F., Mironov D., Goyette S.* A one-dimensional model intercomparison study of thermal regime of a shallow, turbid midlatitude lake // *Geoscientific Model Development*. 2013. V. 6(4). P. 1337–1352.
13. *Stepanenko V.M., Martynov A., Goyette S., Fang X., Perroud M., Mironov D.* First steps of a Lake Model Intercomparison Project // *Boreal Environment Research*. 2010. V. 15. P. 191–202.
14. *Thiery W., Stepanenko V., Fang X., Jöhnk K., Li Z., Martynov A., Perroud M., Subin Z., Darchambeau F., Mironov D., van Lipzig N.* LakeMIP Kivu: evaluating the representation of a large, deep tropical lake by a set of one-dimensional lake models // *Tellus, Series A: Dynamic Meteorology and Oceanography*. 2014. V. 66.
15. *Зиновьев А.Т., Копылов Ю.Н., Кузьмин А.А.* Одномерная вертикальная модель процесса седиментации в глубоком водохранилище. *Водные ресурсы*. 1995. Т. 22, № 6. С. 676–683.

16. *Fang X., Stefan H.G.* Simulations of climate effects on water temperature, dissolved oxygen, and ice and snow covers in lakes of the contiguous U.S. under past and future climate scenarios // *Limnology and Oceanography*. 2009. V. 54. P. 2359–2370.
17. *Tan Z., Zhuang Q., Walter Anthony K.* Modeling methane emissions from arctic lakes: Model development and site-level study // *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*. 2015. V. 7, N 2. P. 459–483.
18. *Joehnk K.D., Umlauf L.* Modelling the metalimnetic oxygen minimum in a medium sized alpine lake // *Ecological Modelling*. 2001. V. 136(1). P. 67–80.
19. *Münnich M., Wüest A., Imboden D.M.* Observations of the second vertical mode of the internal seiche in an alpine lake // *Limnology and Oceanography*. 1992. V. 37(8). P. 1705–1719.
20. *Leonardi D.* Internal and Surface Waves in a Two-Layer Fluid. PhD Thesis. University of Illinois at Chicago, 2011.
21. *Marchenko A.V., Morozov E.G.* Seiche oscillations in Lake Valunden (Spitsbergen) // *Russ. J. Earth. Sci.* 2016. V. 16(2).
22. *Roget E., Khimchenko E., Forcat F., Zavalov P.* The internal seiche field in the changing South Aral Sea (2006–2013) // *Hydrology and Earth System Sciences*. 2017. V. 21(2). P. 1093–1105.
23. *Svensson U.* A mathematical model of the seasonal thermocline // PhD thesis. Lund Inst. of Technol. 1978.
24. *McCutcheon S.C., Martin J.L., Barnwell T.O.* Water Quality. Handbook of Hydrology. 1993. P. 11.11–11.73.
25. *Merian J.R.* Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen. Basel: Schweighauser, 1828.
26. *Kato H., Phillips O.M.* On the penetration of a turbulent layer into stratified fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. 1969. V. 37(4). P. 643.
27. *Price J.F.* On the scaling of stress-driven entrainment experiments // *Journal of Fluid Mechanics*. 1979. V. 90(3). P. 509.
28. *Burchard H.* Applied Turbulence Modelling in Marine Waters. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002.
29. *Hydrodynamics of lakes* / ed. Hutter K. Wien: Springer-Verlag, 1984.
30. *Wüest A., Lorke A.* Small-scale hydrodynamics in lakes // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2003. V. 35. P. 373–412.

## References

1. *Henderson-Sellers B.* New formulation of eddy diffusion thermocline models. *Appl. Math. Modelling*. 1985. V. 9. P. 441–446.
2. *Horn W., Mortimer C.H., Schwab D.J.* Wind-induced internal seiches in Lake Zurich observed and modeled. *Limnology and Oceanography*. 1986. V. 31(6) P. 1232–1254.
3. *Rueda F.J., Schladow S.G.* Surface seiches in lakes of complex geometry. *Limnology and Oceanography*. 2002. V. 47(3). P. 906–910.
4. *Lemmin U., Mortimer C.H., Bäuerle E.* Internal seiche dynamics in Lake Geneva. *Limnology and Oceanography*. 2005. V. 50(1). P. 207–216.
5. *Kirillin G., Lorang M.S., Lippmann T.C., Gotschalk C.C., Schimmelpfennig S.* Surface seiches in Flathead Lake. *Hydrol. Earth Syst. Sci.* 2015. V. 19. P. 2605–2615.

6. *Goudsmit G.-H., Burchard H., Peeters F., Wüest A.* Application of  $k - \varepsilon$  turbulence models to enclosed basins: The role of internal seiches. *Journal of Geophysical Research*. 2002. V. 107(C12). P. 3230.
7. *Gaudard A., Schwefel R., Vinnøa L.R., Schmid M., Wüest A., Bouffard D.* Optimizing the parameterization of deep mixing and internal seiches in one-dimensional hydrodynamic models: a case study with Simstrat v1.3. *Geoscientific Model Development*. 2017. V. 10(9). P. 3411–3423.
8. *Stepanenko V., Mammarella I., Ojala A., Miettinen H., Lykosov V., and Vesala T.* LAKE 2.0: a model for temperature, methane, carbon dioxide and oxygen dynamics in lakes. *Geoscientific Model Development*. 2016. V. 9, N 5. P. 1977–2006.
9. *Stepanenko V.M., Lykosov V.N.* Numerical modeling of heat and moisture transfer in a «lake-sediments» system. *Russian Journal of Meteorology and Hydrology*. 2005. N. 3. P. 95–104. (in Russian).
10. *Stepanenko V.M., Machulskaya E.E., Glagolev M.V., Lykosov V.N.* Numerical modeling of methane emissions from lakes in the permafrost zone. *Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics*. 2011. V. 47(2). P. 252–264.
11. *Stepanenko V., Jöhnk K.D., Machulskaya E., Perroud M., Subin Z., Nordbo A., Mammarella I., Mironov D.* Simulation of surface energy fluxes and stratification of a small boreal lake by a set of one-dimensional models. *Tellus, Series A: Dynamic Meteorology and Oceanography*. 2014. V. 66(1).
12. *Stepanenko V.M., Martynov A., Jöhnk K.D., Subin Z.M., Perroud M., Fang X., Beyrich F., Mironov D., Goyette S.* A one-dimensional model intercomparison study of thermal regime of a shallow, turbid midlatitude lake. *Geoscientific Model Development*. 2013. V. 6(4). P. 1337–1352.
13. *Stepanenko V.M., Martynov A., Goyette S., Fang X., Perroud M., Mironov D.* First steps of a Lake Model Intercomparison Project. *Boreal Environment Research*. 2010. V. 15. P. 191–202.
14. *Thiery W., Stepanenko V., Fang X., Jöhnk K., Li Z., Martynov A., Perroud M., Subin Z., Darchambeau F., Mironov D., van Lipzig N.* LakeMIP Kivu: evaluating the representation of a large, deep tropical lake by a set of one-dimensional lake models. *Tellus, Series A: Dynamic Meteorology and Oceanography*. 2014. V. 66.
15. *Zinoviev A.T., Kopylov Yu.N., Kuzmin A.A.* One-dimensional vertical model of sedimentation in a deep reservoir. *Water Resources*. 1995. V. 22, N. 6. C. 676–683. (in Russian).
16. *Fang X., Stefan H.G.* Simulations of climate effects on water temperature, dissolved oxygen, and ice and snow covers in lakes of the contiguous U.S. under past and future climate scenarios. *Limnology and Oceanography*. 2009. V. 54. P. 2359–2370.
17. *Tan Z., Zhuang Q., Walter Anthony K.* Modeling methane emissions from arctic lakes: Model development and site-level study. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*. 2015. V. 7, N 2. P. 459–483.
18. *Joehnke K.D., Umlauf L.* Modelling the metalimnetic oxygen minimum in a medium sized alpine lake. *Ecological Modelling*. 2001. V. 136(1). P. 67–80.
19. *Münnich M., Wüest A., Imboden D.M.* Observations of the second vertical mode of the internal seiche in an alpine lake. *Limnology and Oceanography*. 1992. V. 37(8). P. 1705–1719.
20. *Leonardi D.* Internal and Surface Waves in a Two-Layer Fluid. PhD Thesis. University of Illinois at Chicago, 2011.
21. *Marchenko A.V., Morozov E.G.* Seiche oscillations in Lake Valunden (Spitsbergen). *Russ. J. Earth. Sci.* 2016. V. 16(2).

22. *Roget E., Khimchenko E., Forcat F., Zaviyalov P.* The internal seiche field in the changing South Aral Sea (2006–2013). *Hydrology and Earth System Sciences*. 2017. V. 21(2). P. 1093–1105.
23. *Svensson U.* A mathematical model of the seasonal thermocline. PhD thesis. Lund Inst. of Technol. 1978.
24. *McCutcheon S.C., Martin J.L., Barnwell T.O.* Water Quality. *Handbook of Hydrology*. 1993. P. 11.11–11.73.
25. *Merian J.R.* Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen. Basel: Schweighauser, 1828.
26. *Kato H., Phillips O.M.* On the penetration of a turbulent layer into stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*. 1969. V. 37(4). P. 643.
27. *Price J.F.* On the scaling of stress-driven entrainment experiments. *Journal of Fluid Mechanics*. 1979. V. 90(3). P. 509.
28. *Burchard H.* Applied Turbulence Modelling in Marine Waters. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002.
29. *Hydrodynamics of lakes*. Ed. Hutter K., Wien: Springer-Verlag, 1984.
30. *Wüest A., Lorke A.* Small-scale hydrodynamics in lakes. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2003. V. 35. P. 373–412.

*Поступила в редакцию 16.11.2017*